



Teoría General del Filtro de Variable de Estado

Ing. A. Ramón Vargas Patrón
rvargas@inictel-uni.edu.pe
INICTEL-UNI

Introducción

La construcción de los filtros eléctricos se llevó a cabo desde un inicio utilizando únicamente elementos pasivos R-L-C. Los métodos desarrollados empleaban ingeniosamente la dependencia de los elementos reactivos con la frecuencia para obtener las respuestas deseadas de amplitud y fase. Con el devenir del tiempo surgieron cambios notables en las técnicas de diseño de los filtros, introduciéndose conceptos como la función matemática de aproximación, entre otros. La investigación se orientó también hacia la obtención de nuevos materiales y técnicas de fabricación, lográndose componentes pasivos más lineales, estables y duraderos.

A frecuencias inferiores a 100 kHz los filtros pasivos R-L-C son en general voluminosos, pesados y costosos. La construcción de redes con elevada selectividad de falda es una labor difícil en esta región del espectro, debido a los bajos valores del factor de sobretensión o de mérito “Q” de las inductancias.

Históricamente, al incluirse un elemento activo como parte integrante de un filtro se obtuvieron cuatro ventajas importantes:

- Reducción del volumen.
- Reducción del peso
- Síntesis de los elementos inductivos y
- Reducción del costo de manufactura

aunque siempre quedó pendiente el problema de la sensibilidad del filtro a los cambios o derivas en las características del elemento activo y/o de los componentes pasivos, como consecuencia de las variaciones de temperatura o el envejecimiento.

El filtro de variable de estado surge como una alternativa elegante para resolver el problema de la sensibilidad, ya que permite el ajuste individual de los parámetros de la red, tales como el Q, frecuencia central o de corte, ancho de banda, etc.

En el presente trabajo se expone la teoría matemática de este tipo de filtro, desarrollándose de manera lógica el diagrama de estado del mismo. El estudio se complementa con ejemplos de diseño de redes de compensación de fase, hendidura y pasa-banda.



El Filtro de Variable de Estado

Consideremos un filtro cuya función de transferencia sea:

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_1(s)} = K \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad \dots(1)$$

$$= K \frac{N(s)}{D(s)} \quad \dots(2)$$

Definamos una variable auxiliar E(s) tal que:

$$\frac{V_o(s)}{E(s)} = N(s) \quad \dots(3)$$

y

$$\frac{E(s)}{V_1(s)} = \frac{K}{D(s)} \quad \dots(4)$$

Entonces, de la Ec. (4):

$$K V_1(s) = E(s) \cdot D(s)$$

$$K V_1(s) = E(s) \cdot (s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0) \quad \dots(5)$$

En el dominio del tiempo la expresión (5) se escribe:

$$K v_1 = \frac{d^n \epsilon}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} \epsilon}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{d \epsilon}{dt} + b_0 \epsilon \quad \dots(6)$$

También:

$$\frac{d^n \epsilon}{dt^n} = -b_0 \epsilon - b_1 \frac{d \epsilon}{dt} - \dots - b_{n-1} \frac{d^{n-1} \epsilon}{dt^{n-1}} + K v_1 \quad \dots(7)$$



Hagamos a continuación

$$\begin{array}{ll}
\dot{x}_n = \frac{d^n \epsilon}{dt^n} & x_n = \frac{d^{n-1} \epsilon}{dt^{n-1}} \\
\dot{x}_{n-1} = \frac{d^{n-1} \epsilon}{dt^{n-1}} & x_{n-1} = \frac{d^{n-2} \epsilon}{dt^{n-2}} \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\dot{x}_1 = \frac{d \epsilon}{dt} & x_1 = \epsilon \quad \dots(8.a)
\end{array}$$

Tenemos entonces que:

$$\dot{x}_{i-1} = x_i \quad i = 2, \dots, n \quad \dots(8.b)$$

Luego:

$$\dot{x}_n = -b_0 x_1 - b_1 \dot{x}_1 - \dots - b_{n-1} \dot{x}_{n-1} + K v_1 \quad \dots(9)$$

o lo que es lo mismo:

$$\dot{x}_n = -b_0 x_1 - b_1 x_2 - \dots - b_{n-1} x_n + K v_1$$

Podemos expresar (8) y (9) como una ecuación de estado en forma matricial:

$$\begin{array}{l}
\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}v_1 \\
\epsilon = \mathbf{C}\mathbf{X}
\end{array} \quad \dots(10)$$



donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 & \dots & \dots & -b_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ K \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times n}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

y:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Ahora bien, podemos implementar la Ec.(4) o equivalente la (8) y (9) como indica la figura 1.

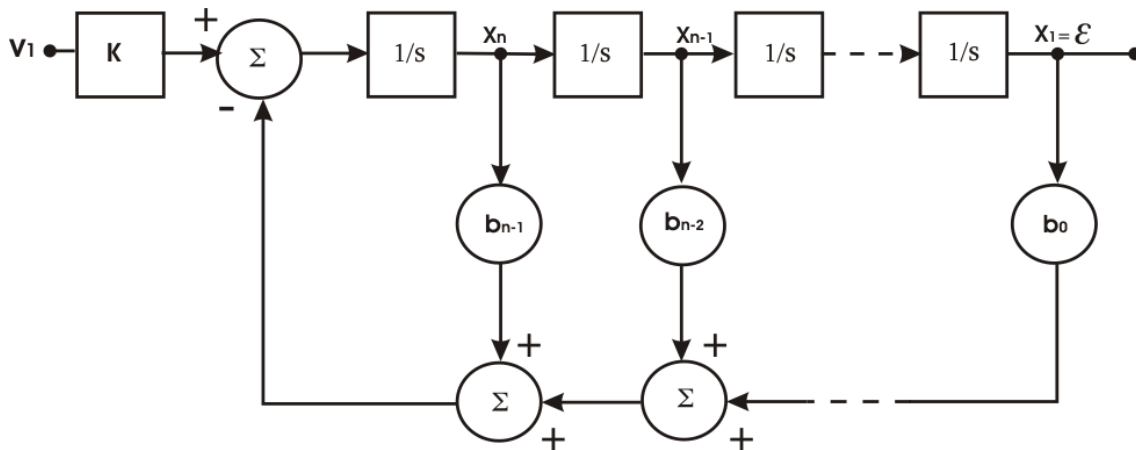


Fig.1 Filtro de Variable de Estado para $\frac{E(s)}{V_1(s)} = \frac{K}{D(s)}$

La salida [Ec. (3)] se implementa combinando los estados x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 con la derivada de x_n , como se muestra a continuación.

De la Ec.(3):

$$\begin{aligned} V_0(s) &= E(s).N(s) \\ &= a_n s^n E(s) + a_{n-1} s^{n-1} E(s) + \dots + a_1 s E(s) + a_0 E(s) \quad \dots(11) \end{aligned}$$

Esta expresión es equivalente a:

$$\begin{aligned} v_0 &= a_n \dot{x}_n + a_{n-1} \dot{x}_{n-1} + \dots + a_1 \dot{x}_1 + a_0 x_1 \\ &= a_n \dot{x}_n + a_{n-1} x_n + \dots + a_1 x_2 + a_0 x_1 \quad \dots(12) \end{aligned}$$

La implementación de la Ec. (12) sería como indica la Fig. 2.

Red de Compensación de Fase

Como un primer ejemplo sinteticemos el filtro cuya función de transferencia es:

$$G(s) = K \frac{s + A}{s + B}$$

y que corresponde a una red de compensación de fase del tipo de avance o de retardo (ver Fig. 3).

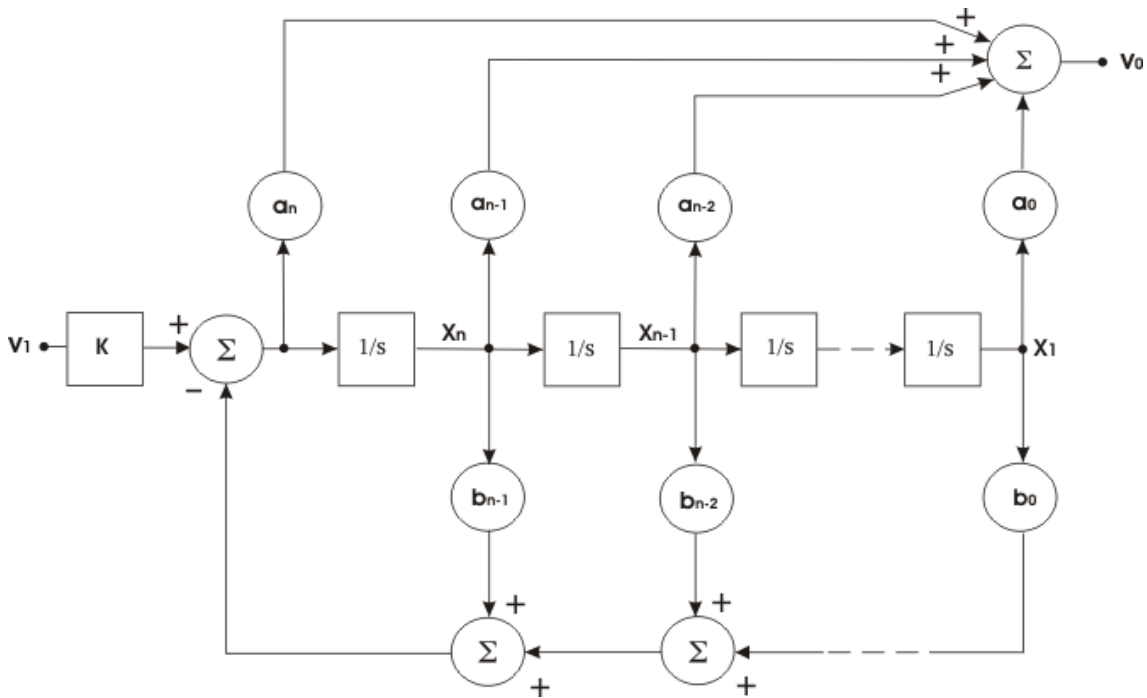


Fig.2 Filtro de Variable de Estado para $\frac{V_0(s)}{V_1(s)} = G(s)$

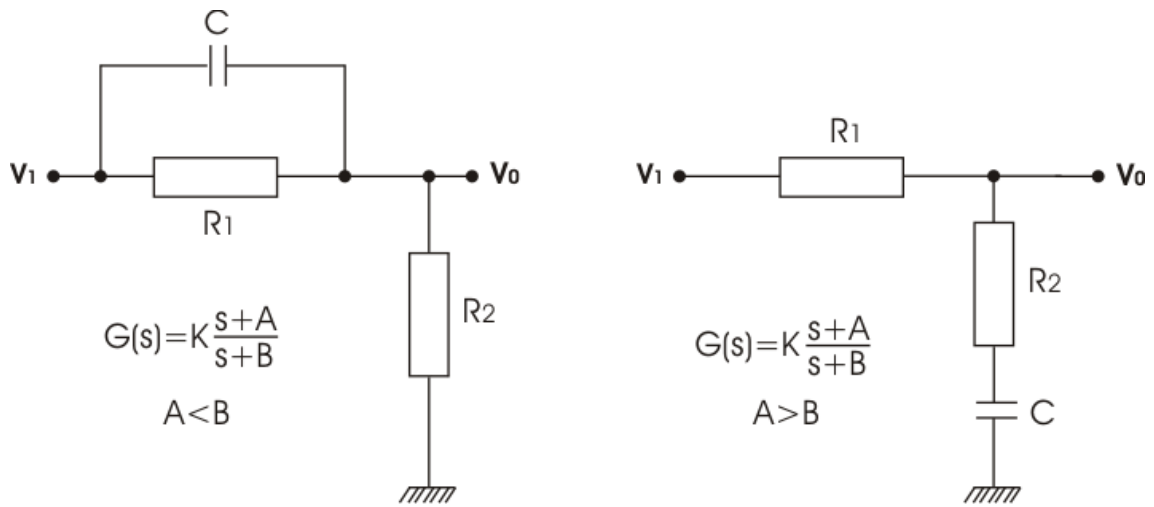


Fig.3 Red de compensación de fase

Tomando como referencia la Fig.2, el filtro en cuestión tendrá la forma indicada en la Fig.4, en donde el ajuste de A y B es totalmente independiente uno del otro.

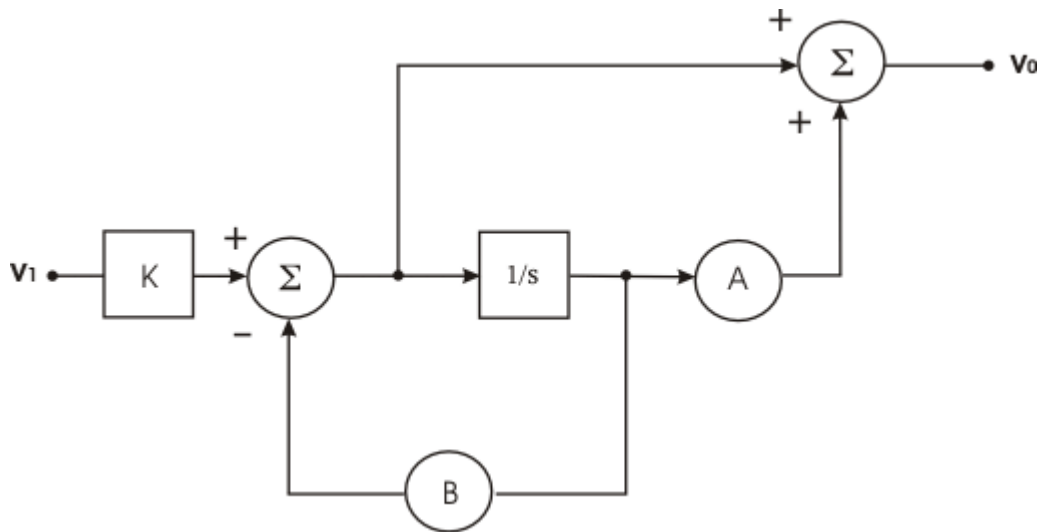


Fig.4 Diagrama de estado del filtro con función de transferencia $K \frac{(s + A)}{(s + B)}$

La implementación del filtro se muestra en la Fig.5.

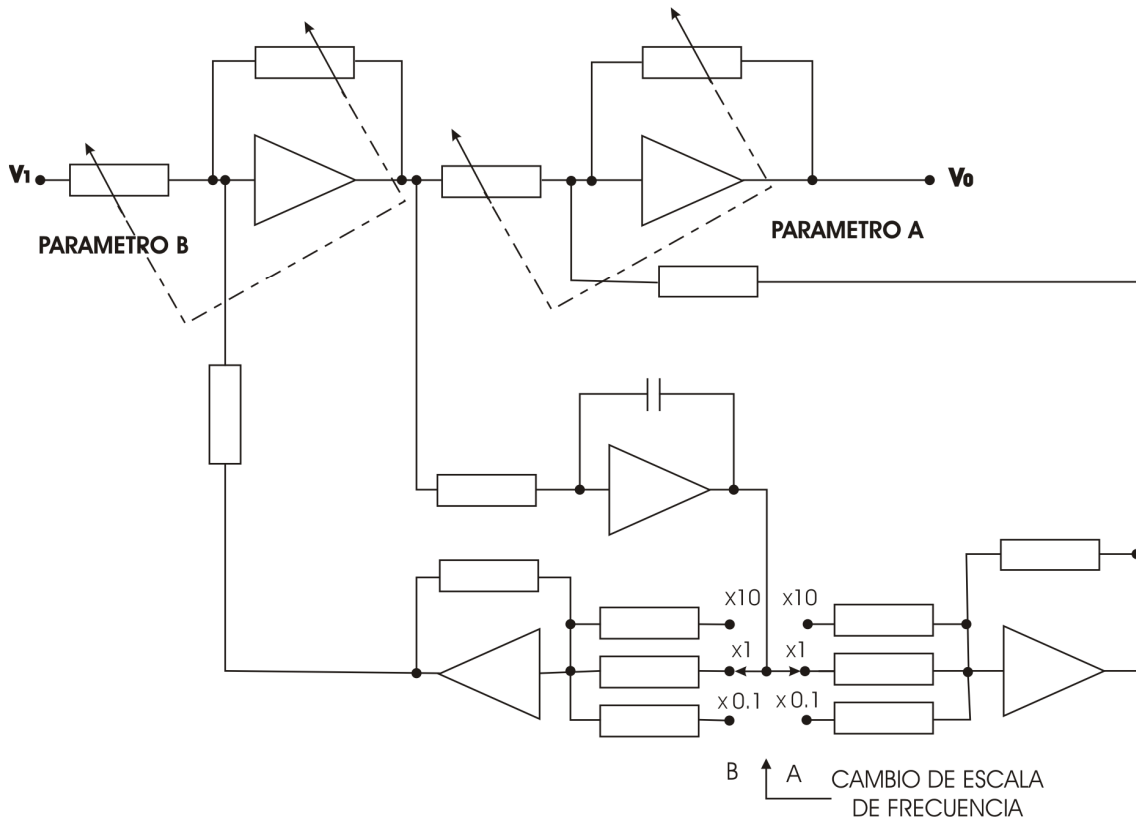
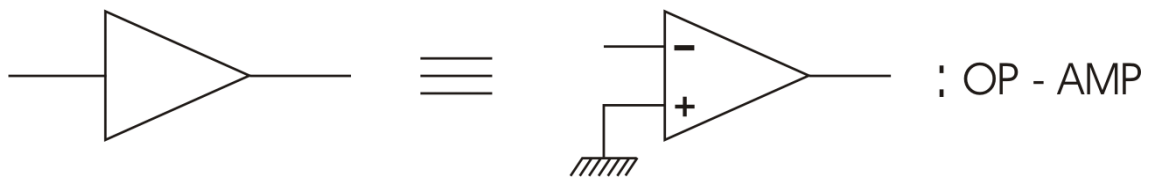


Fig.5 Implementación de una red de compensación de fase

De la Fig.5 en adelante se tomará en cuenta la siguiente correspondencia:



Filtro de Rechazo de Banda

La función de transferencia:

$$G(s) = \frac{V_0(s)}{V_1(s)} = \frac{s^2 + a_1s + a_2}{s^2 + b_1s + b_2} \quad \dots(13)$$

para el caso $a_2 = b_2 = \omega_0^2$ corresponde a



- Un filtro pasabanda alrededor de $\omega = \omega_0$ si $a_1/b_1 > 1$
- Un filtro de rechazo de banda si $a_1/b_1 < 1$, siendo ω_0 la pulsación de rechazo.

Analicemos el caso $a_1 < b_1$. Haciendo $s = j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega a_1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega b_1} \quad \dots(14)$$

$$= \frac{1 + j\left(\frac{\omega a_1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)}{1 + j\left(\frac{\omega b_1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)}$$

$$= \frac{1 + ja_1 \left[\frac{(\omega/\omega_0)^2}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \right]}{1 + jb_1 \left[\frac{(\omega/\omega_0)^2}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \right]}$$

$$= \frac{1 - ja_1/\omega_0 \Omega}{1 - jb_1/\omega_0 \Omega} \quad \dots (15)$$

siendo

$$\Omega = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0} \quad \dots (16)$$

Un parámetro importante es el ancho de banda “b” (ver Fig.6).

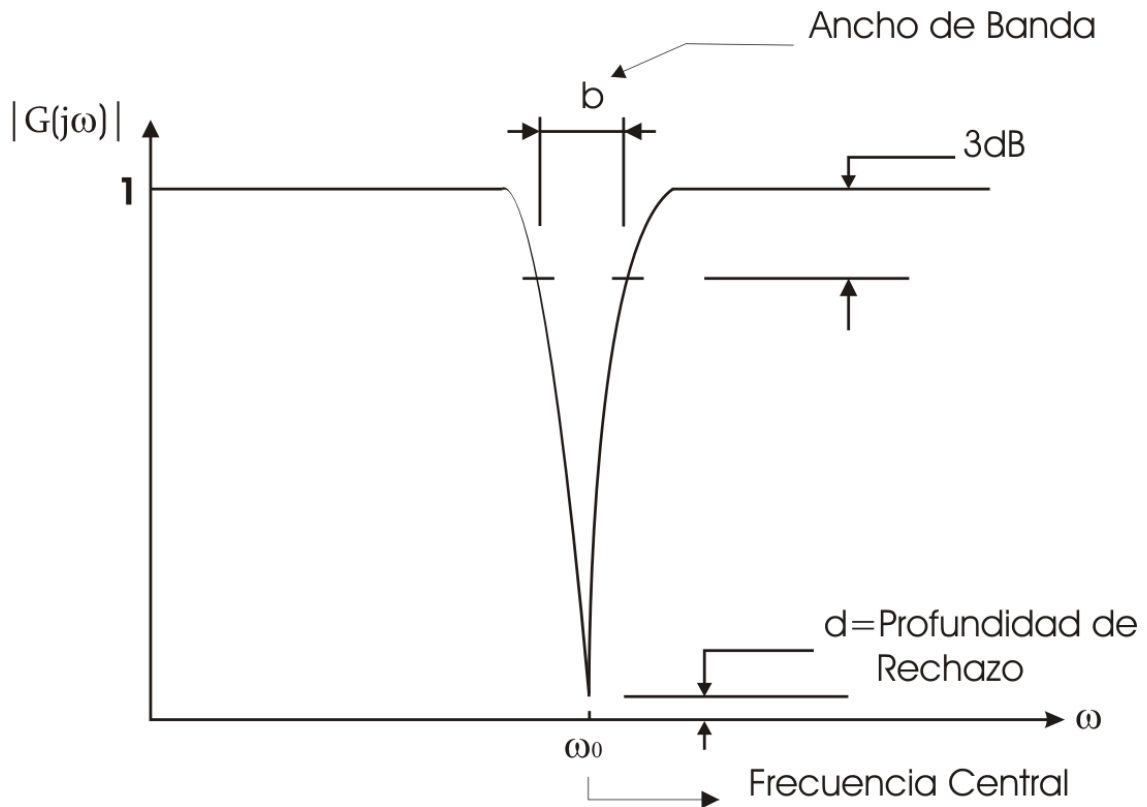


Fig.6 Definición de los parámetros del filtro de rechazo de banda

Para calcular “b” hacemos:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

es decir

$$\frac{1 + \left(\frac{a_1^2}{\omega_0^2 \Omega^2} \right)}{1 + \left(\frac{b_1^2}{\omega_0^2 \Omega^2} \right)} = \frac{1}{2}$$

$$2 + \frac{2a_1^2}{(\omega_0 \Omega)^2} = 1 + \frac{b_1^2}{(\omega_0 \Omega)^2}$$

$$1 = \frac{1}{(\omega_0 \Omega)^2} (b_1^2 - 2a_1^2)$$



Por lo tanto:

$$\Omega^2 = \frac{b_1^2 - 2a_1^2}{\omega_0^2}$$
$$\Omega = \pm \frac{b_1}{\omega_0} \sqrt{1 - \frac{2a_1^2}{b_1^2}} \quad \dots(17)$$

Para un filtro muy selectivo, o equivalentemente de banda de rechazo angosta, puede aproximarse Ω por:

$$\Omega = \frac{(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)}{\omega\omega_0}$$
$$\approx \frac{2\omega(\omega - \omega_0)}{\omega\omega_0}$$
$$\approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \quad \dots (18)$$

Reemplazando este último resultado en la Ec.17 tenemos:

$$\Delta\omega = \pm \frac{b_1}{2} \sqrt{1 - 2\frac{a_1^2}{b_1^2}} \quad \dots (18.a)$$

El ancho de banda B_ω es:

$$B_\omega = b_1 \sqrt{1 - 2\frac{a_1^2}{b_1^2}} \quad \dots (19)$$

y con referencia a la Fig.6, siendo $B_\omega = b$ y $a_1/b_1 = d$, tenemos que:

$$b_1 = \frac{b}{\sqrt{1 - 2d^2}}$$

y

$$a_1 = db_1 = \frac{bd}{\sqrt{1 - 2d^2}} \quad \dots (20)$$



La Ec.13 toma la forma:

$$G(s) = \frac{s^2 + \left(\frac{bd}{\sqrt{1-2d^2}}\right)s + \omega_0^2}{s^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{1-2d^2}}\right)s + \omega_0^2} \quad \dots (21)$$

Si $d^2 \ll 0.5$ ó equivalente $d \ll 0.7$:

$$G(s) = \frac{s^2 + dbs + \omega_0^2}{s^2 + bs + \omega_0^2} \quad \dots (22)$$

siendo el Q del circuito:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega} \quad \dots(22.a)$$
$$= \frac{\omega_0}{b}$$

Implementación del Filtro de Rechazo de Banda

La función de transferencia que describe a la red de rechazo [Ec.(22)] puede escribirse en la forma normalizada:

$$G(\lambda) = \frac{\lambda^2 + \lambda\left(\frac{b}{\omega_0}\right)d + 1}{\lambda^2 + \lambda\left(\frac{b}{\omega_0}\right) + 1} \quad \dots (23)$$

donde b y d son los parámetros definidos anteriormente y $\lambda = s/\omega_0$ es la variable frecuencia relativa.

El diagrama de estado del filtro se ilustra en la Fig.7 y una implementación del mismo en la Fig.8, donde los parámetros ω_0 , b/ω_0 y d son variables independientes con la limitación $d^2 \ll 0.5$.

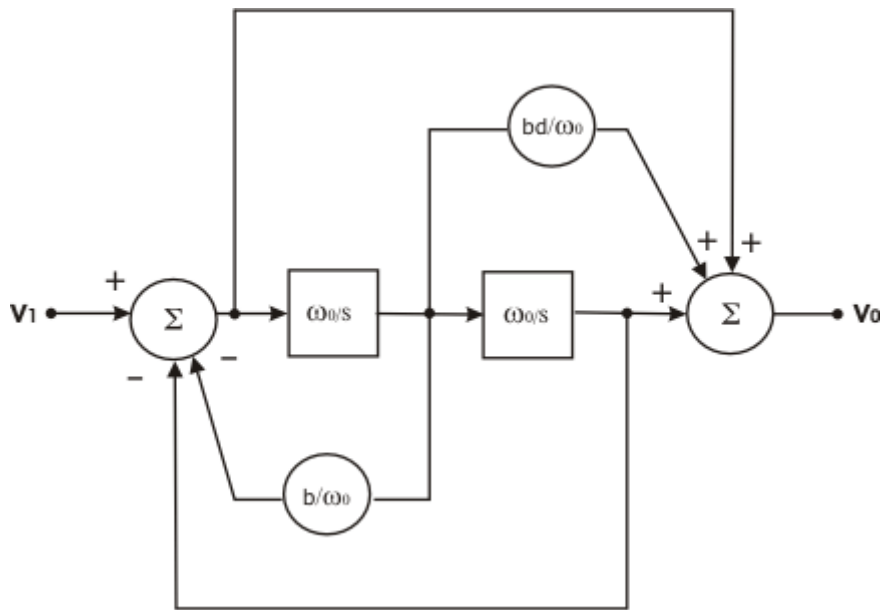


Fig.7 Filtro de Variable de Estado del tipo de rechazo de banda o hendidura.

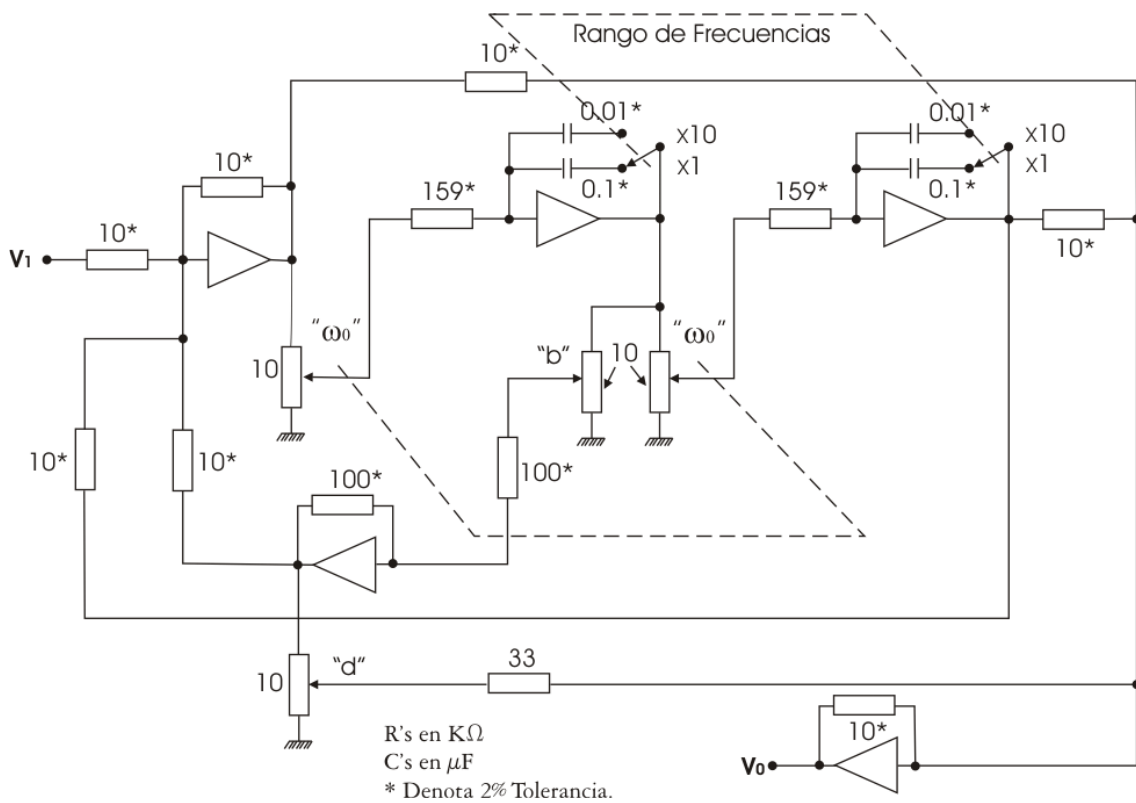


Fig.8 Circuito para el filtro de hendidura con rangos: x1 alrededor de 10Hz. x10 alrededor de 100Hz.



Filtro Pasa-banda

La función de transferencia correspondiente es:

$$G(s) = \frac{a_1 s}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad \dots (24)$$

También,

$$G(j\omega) = \frac{ja_1\omega}{jb_1\omega + (b_0 - \omega^2)} \quad \dots (25)$$

La ganancia a resonancia es:

$$G(j\omega_0) = a_1/b_1 \quad \dots(26.a)$$

La frecuencia de resonancia está dada por:

$$\omega_0 = \sqrt{b_0} \quad \dots (26.b)$$

El factor de sobretensión o factor Q se expresa por:

$$Q = \frac{\sqrt{b_0}}{b_1} = \frac{\omega_0}{b_1} \quad \dots (26.c)$$

La función de transferencia podemos re-escribirla así:

$$G(s) = \frac{\frac{\omega_0}{Q} \cdot G(j\omega_0) s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2} \quad \dots(27)$$

Es conveniente nuevamente hacer el cambio de variable $\lambda = s/\omega_0$. La Ec.27 toma entonces la forma:

$$G(\lambda) = \frac{G(j\omega_0) \cdot \lambda}{\lambda^2 + \frac{\lambda}{Q} + 1} \quad \dots(28)$$

En la Fig.9 se muestra el diagrama de estado correspondiente al filtro pasa-banda cuya función de transferencia está expresada por (28).

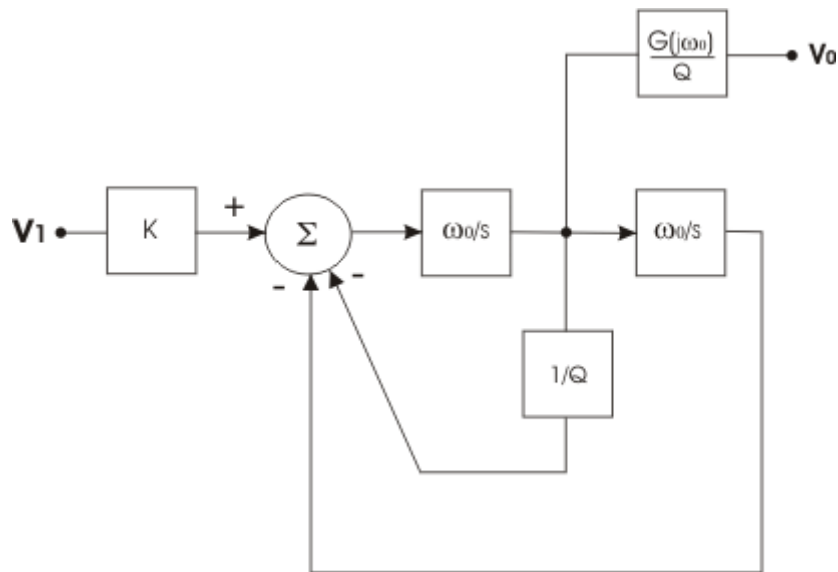


Fig.9 Diagrama de Estado del filtro pasa-banda

Una implementación del mismo se puede observar en la Fig.10. Nuevamente, el Q , ω_0 y $G(j\omega_0)$ son ajustables en forma independiente.

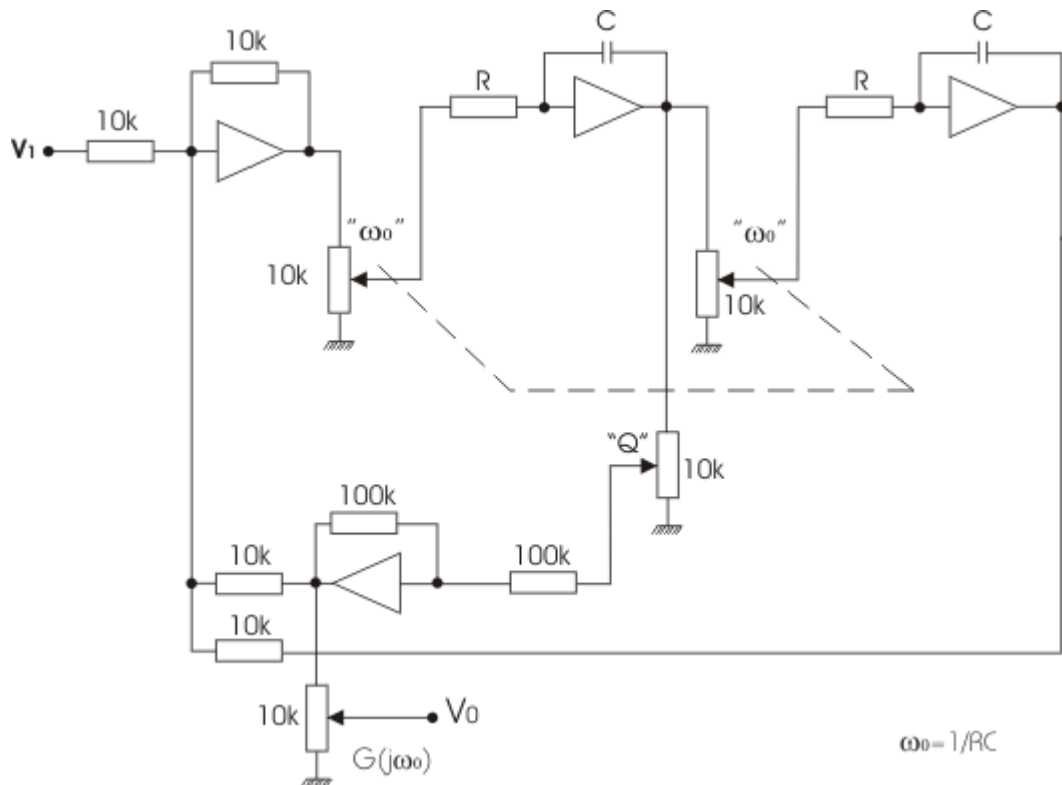


Fig.10 Implementación del filtro pasa-banda.



CONCLUSIONES

Se ha desarrollado el concepto del filtro activo de variable de estado. La ecuación diferencial que describe su comportamiento frente a una entrada arbitraria adopta la forma de una ecuación de estado, la misma que puede expresarse en forma matricial.

Se ha logrado obtener así mismo la forma general del diagrama de estado del filtro, a partir del cual puede deducirse de una forma sencilla la configuración que tendrá cualquier red elegida, ya sea un compensador de adelanto o atraso, un filtro pasa-banda o una red de rechazo de banda.

Los circuitos activos implementados mediante esta técnica permiten un control independiente de sus parámetros, constituyendo una alternativa interesante para estructuras de filtro de segundo orden.

El filtro de variable de estado encuentra aplicación en los campos de control automático y en el procesamiento analógico de señales sub-audio y de audiofrecuencia.

BIBLIOGRAFIA

1. Wilson, D.R. and Burl, M., "Design and application of active compensation circuits for servo control systems", The Radio and Electronic Engineer, Vol. 43, N° 6, June 1973.
2. Wilson, D.R., Corral, D.R. and Davies, R., "Design of notch networks", Proc. Instn. Elect. Engrs., 118, pp. 1852-7, December 1971.
3. Rowe, N.B., "Designing a low-frequency active notch filter", Electronic Engineering, 44, pp. 43-5, April 1972.
4. Wilson, D.R. and Butler, M.M., "Series Compensation of servodrive resonance", Proc. Instn. Elect. Engrs., 119 pp. 1517-20, October 1972.
5. Bildstein, P., "Filtros Activos", Editorial Marcombo.

Ing. A. Ramón Vargas Patrón
rvargas@inictel-uni.edu.pe
Lima-Perú, Sudamérica
Febrero 23 del 2006.